Διάλεξη 10η

08/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διαφορικά συστήματα α' τάξης:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Διανυσματική μορφή:

$$\boxed{\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} = \bar{f}(x, \bar{y})}$$

Ενώ για μια τυχαία τιμή x_0, θα γράφουμε:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_0^1 \\ y_2(x_0) &= y_0^2 \\ &\vdots \\ y_n(x_0) &= y_0^n \end{aligned}\right\} \boxed{\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0}$$

Π.χ

$y_1' = y_2^2$ | $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$y_2' = x + y_1^2$ | $f_1(x, y_1, y_2) = y_2^2$

$y_1(0) = y_2(0)$ | $f_2(x, y_1, y_2) = x + y_1^2$

$\left.\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\right\} \bar{f}(x) = \begin{pmatrix} y_2^2 \\ x+y_1^2 \end{pmatrix}$

$\bar{y}'(x) = \bar{f}(x, \bar{y})$

$\bar{y}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x, 0)$

~o~o~o~o

! Όταν έχω διαφ. συστ. α' τάξης ή διανυσμ. εξίσωση

ισοδύναμης
$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}\right\}$$
οπότε η f να είναι συνεχής, όπου $f_i : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ και $\bar{f} : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$

$\underline{\Omega}$ + τοπικ. στοι

άρα για να την έχω πρόβλημα το Π.Α.Τ **πρέπει**

$(x_0, \bar{y}_0) \in \underline{\Omega}$ //.

~o~o~o~o

Π.χ

$$\left.\begin{aligned} (E) &: \bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \\ (C) &: \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{aligned}\right\} \text{Π.Α.Τ.}$$

Λύση

$\bar{y}$ παραγ. στο I διαφ. $\left\{\begin{array}{l} (E) : \forall x \in I \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 : (C) \end{array}\right.$

π.χ

$$\bar{y}' = g(x,\bar{y})$$

$$S = \{(x,y) : |x| \leq 1,\ |y_1| + |y_2| \leq 1\}$$

$$g_1(x,\bar{y}) = x^2 + y_1^2 \quad (= y_1')$$

$$g_2(x,\bar{y}) = x^2 e^{x+y_2} \quad (= y_2')$$

$$\bar{y}(0) = \bar{0} = (0,0)$$

~o~o~o~o~o~o~o

Συνολικά: $\bar{y}' = \bar{f}(x,\bar{y})$: (E)

$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ (C)

με $\bar{f}(x,\bar{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y_1,\dots,y_n) \\ \vdots \\ f_n(x,y_1,\dots,y_n) \end{bmatrix}$

Με βάση τα παραπάνω διατυπώνω τα θεωρήματα προσαρμοσμένα στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1: Ας είναι $f : \overset{\circ}{D_f} \to \mathbb{R}$ με $D_f \subseteq I \times \mathbb{R}$ και $(x_0,\bar{y}_0) \in \overset{\circ}{D_f}$ και $a,b>0$: $R = \{(x,\bar{y}) \in \overset{\circ}{D_f} : |x-x_0| \leq a,\ \|\bar{y}-\bar{y}_0\| \leq b\}$

αν $\exists k>0$: $\|\bar{f}(x,\bar{y}_1) - \bar{f}(x,\bar{y}_2)\| \leq k\|\bar{y}_1-\bar{y}_2\|$, $(x,y_1),(x,y_2) \in \underline{\Omega}$

Τότε το π.Α.Τ. (E)-(C) έχει ακριβώς μια λύση $I = [x_0-r, x_0+r]$ με $r = \min\{a, \frac{m}{b}\}$ με $m = \sup_{R} \|\bar{f}(x,\bar{y})\|$, $\left\{\begin{matrix} m=0 \\ r=a \end{matrix}\right\}$

(*) Το θεώρημα αυτό υπάρχει στο βιβλίο Αλεξόπουλος ($\mathbb{R}^n$)

Π.χ

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{x^2 + y_1^2}^{g_1(x,\bar{y})} \\ \underbrace{x^2 e^{x+y_2}}_{g_2(x,\bar{y})} \end{pmatrix}}_{\text{Πληρούται η συνθ. Lip;}} = \bar{g}(x,\bar{y})$$

$R: = \{ |x| \leq 1, \ |y_1| + |y_2| \leq 1 \}$

Πληρούται η συνθ. Lip;

$$\sup_R \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y_1}(x,y_1,y_2) \right\| = \sup_R \left\| \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(2y_1)^2 + 0^2} = 2|y_1| = 2$$

(*)

$$\sup_R \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y_2}(x,y_1,y_2) \right\| = \sup_R \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \cdot e^{x+y_2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x^2 \cdot e^{x+y_2})^2}$$

$$= x^2 \cdot e^{x+y_2}$$

$$\leq 1 \cdot e^2 = e^2$$

(*) Επιλέγω εγώ ποια στάθμη θα χρησιμοποιήσω, διότι οι $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ είναι ισοδύναμες //

~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o ~o

Ειδική περίπτωση: (Να έχω γραμμ. συστήματα)

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned}\right\} \ \bar{y}'(x) = \underbrace{A(x)\bar{y}_1(x) + \bar{b}(x)}_{f(x,\bar{y}_1)}$$

όπου $A(x)$: πίνακας.

Μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα 1;

Αν $A \in \Pi_{n\times n}$ και $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ τότε: i) $\|A\|_\pi^{\in \Pi_{n\times n}} = \sup_{\|\bar{z}\|=1} \|A\bar{z}\|$

ii) $\forall \bar{f} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \Pi_{n\times n} \to \|A\bar{f}\| \leq \|A\|_\pi \|\bar{f}\|$.

Με βάση τα παραπάνω για τον $n\times n$ πίνακα $A(x)$ και για τα $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ είναι:

$$\|\bar{f}(x,\bar{y}_1) - \bar{f}(x,\bar{y}_2)\| = \|A(x)[\bar{y}_1 - \bar{y}_2]\| \leq \|A(x)\| \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$$

όπου $K = \sup_{x \in I} \|A(x)\|$ $\leq k\|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$. Άρα παίρνω την συνθήκη Lip

οπότε ισχύει το θεώρημα//. (και έτσι υπαρξ. μοναδ. και λύσης κ.τ.λ)

Άσκηση - Παράδειγμα:

Έστω ότι έχω την διαφ. εξίσωση $\bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}$

$$\bar{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

α) Έχει λύσεις;

Έχω την μορφή $\bar{y}' = A\bar{y}$, όπου A είναι σταθ. πίνακας. Άρα η συνθήκη Lip ισχύει. Το $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα και η εξίσωση $\dot{\bar{y}}(x) = A(x)\bar{y}(x)$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Αφού έχω γραμμ. εξίσωση ισχύει η συνθ. Lip.

$\bar{f}(x, \bar{y}) = A\bar{y}$

$$\|f(x,\bar{y}_1) - f(x,\bar{y}_2)\| = \|A\bar{y}_1 - A\bar{y}_2\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$$
$$= K \cdot \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$$

Έτσι η λύση του συστήματος υπάρχει και είναι μοναδική//

β) Να διαπιστωθεί ότι ~~[illegible]~~ μοναδική λύση είναι η εξής:

$$\bar{y}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x} \\ \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x} \\ 1/2 - 1/6e^{2x} - 4/3e^{-x} \end{bmatrix}$$

Λύση

Βήμα 1ο:

$$\bar{y}'(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 2e^{x} \\ \frac{1}{3} \cdot 2e^{2x} + \frac{2}{3}(-1)e^{-x} \\ -\frac{1}{6} \cdot 2e^{2x} + \frac{4}{3}e^{x} \end{bmatrix}$$

τότε

Πρέπει το $A\bar{y}(x) =$ να βρίσκει αυτό

Βήμα 9ο

Για $x=0$ πρέπει $\bar{Y}(0) = \begin{bmatrix} 1/3 - 1/2 \\ \cdot 1/3 + 2/3 \\ 1/3 - 1/6 - 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = με το $\bar{Y}(0)$ που δίνεται στην εκφώνηση!!

Άρα είναι όντως λύση

~o~o~o~o~o

▶ Έστω ένας πίνακας $A(x): I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ με

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \text{ και } A'(x) = \begin{bmatrix} a'_{11}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ a'_{n1}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

και η ορίζουσα $D_A: I \to \mathbb{R}$. Τότε η παράγωγος της ορίζουσας είναι:

$$D'(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}' =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

οπότε διαπιστώνω ότι $\boxed{|A(x)|' \neq |A'(x)|}$

Ορισμός: Αν $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις οι οποίες έχουν παράγωγο (τουλάχιστον) $n-1$ τάξης, τότε η ορίζουσα

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & & \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}(x)$$

καλείται ορίζουσα Wronski των $f_1, \dots, f_n$.

Π.χ

$f_1(x) = e^{2x} + x^2$

$f_2(x) = x + \cos x \quad , x \in (-2, 7) = I$

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} + x^2 & x + \cos x \\ 2e^{2x} + 2x & 1 + \sin x \end{vmatrix} = (e^{2x} + x^2)(1 + \sin x) - (x + \cos x)(2e^{2x} + 2x)$$

Ας είναι $f_1, \dots, f_n : A \to \mathbb{R}$

Ορισμός: Λέμε ότι οι $f_1, \dots, f_n$ είναι γρ. εξαρτ. στο A αν $\exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ με $|c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$ και $c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0, \ \forall x \in A$.

(*) Πρέπει πάντα όταν θέλω να μιλήσω για γρ. εξαρτ. ή γρ. ανεξ. να προσέχω για ποιο σύνολο μιλάω.

Άσκηση

Να εξετάσετε εάν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γρ. εξαρτ. ή γρ. ανεξ.

$f_1(x) = 1$,

$f_2(x) = \cos x \quad , x \in (-2\pi, 2\pi)$

$f_3(x) = \cos 2x$

Λύση

Λύση

Ας είναι $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \cos 2x = 0, \quad x \in (-2\pi, 2\pi)$$

για $x=0$: $c_1 + c_2 + c_3 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$: $c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3(-1) = 0$

$\parallel$

$\left(x = -\frac{\pi}{2} : c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot (-1) = 0 \right)$

για $x = \pi$: $c_1 + (-1)c_2 + c_3 \cdot 1 = 0$

Άρα έχω υποχρεωτικά στο εξής ομογενές σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 0 - c_3 &= 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow D = | \ldots | \neq 0$$

άρα $\underline{\underline{c_1 = c_2 = c_3 = 0}}$

__Β' τρόπος__: Έστω $f(x) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \cos 2x = 0$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$

Παρατηρώ ότι f είναι παραγωγίσιμη.

Η f διαπιστώνω ότι __δεν__ είναι σταθερή αφού……