

Διοτρητής 10^{ος}
08/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διαφορικά Εξισώματα Ο' τάξης:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$
$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Βιανωσιστοική μορφή:

$$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} = \bar{f}(x, \bar{y})$$

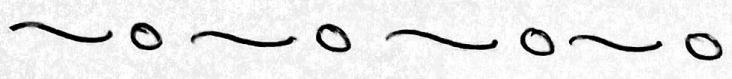
Εάν δώσουμε τα αρχικά στοιχεία x_0 , θα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x_0) &= y_0^1 \\ y_2(x_0) &= y_0^2 \\ \vdots \\ y_n(x_0) &= y_0^n \end{aligned} \right\} \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$$

π.χ

$$\begin{array}{l}
 y_1' = y_2^2 \\
 y_2' = x + y_1^2 \\
 y_1(0) = y_2(0)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
 f_1(x, y_1, y_2) = y_2^2 \\
 f_2(x, y_1, y_2) = x + y_1^2
 \end{array} \right.
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \end{array} \right\}
 \bar{F}(x) = \begin{pmatrix} y_2^2 \\ x + y_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \bar{F}(x, \bar{y}) \\
 y'(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x, 0)
 \end{aligned}$$

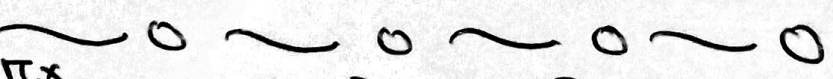


! Όταν έχω διαφ. βλστ. ο' τ' ατμς ή διαφ. ελιωθσμ

$$\left. \begin{array}{l}
 y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\
 \vdots \\
 y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n)
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{ονομα ή } f \text{ να είναι} \\
 \text{βλστ ή } \text{ισοθ} \\
 f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ να } \bar{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

και για να την έχω πρόβλημα το π.Α.Τ πρέπει

$$(x_0, \bar{y}_0) \in \mathbb{R}^n$$



$$\left. \begin{array}{l}
 (\epsilon) : \bar{y} = \bar{F}(x, \bar{y}) \\
 (c) : \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0
 \end{array} \right\} \text{π.Α.Τ.}$$

Λύση

$$\bar{y} \text{ παραγ. στο } I \text{ διαφ. } \left\{ \begin{array}{l}
 (\epsilon) : \forall x \in I \\
 \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 : (c)
 \end{array} \right.$$

π.χ

(3)

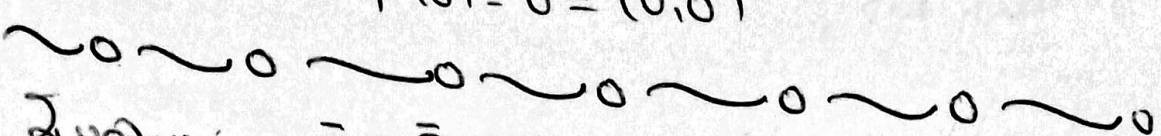
$$\bar{y} = g(x, \bar{y})$$

$$g_1(x, \bar{y}) = x^2 + y_1^2 \quad (= y_1')$$

$$g_2(x, \bar{y}) = x^2 e^{x+y_2} \quad (= y_2')$$

$$\bar{y}(0) = \bar{0} = (0, 0)$$

$$S = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y_1| + |y_2| \leq 1\}$$



Λογαίρι: $\bar{y} = \bar{F}(x, \bar{y}) : (t)$

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \quad (c)$$

be
$$\bar{F}(x, \bar{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}$$

Ne Bolem ta paraitroun hoxhodon ta thymata: poyota globala ston \mathbb{R}^n .

Θωρημα 1: As einai $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ be $D_f \subseteq \mathbb{I} \times \mathbb{R}$ von $(x_0, \bar{y}_0) \in D_f$

$$\text{von } a, b > 0 : R = \{(x, \bar{y}) \in D_f : |x - x_0| \leq a, \|\bar{y} - \bar{y}_0\| \leq b\}$$

$$\text{ou } \exists k > 0 : \|\bar{F}(x, \bar{y}_1) - \bar{F}(x, \bar{y}_2)\| \leq k \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|, (x, \bar{y}_1), (x, \bar{y}_2) \in R$$

Tote to π.A.T. (t) - (c) exei oxribur bio xion $I = [x_0 - r, x_0 + r]$

$$\text{be } r = \min \left\{ a, \frac{m}{b} \right\} \text{ be } m = \sup_R \|\bar{F}(x, \bar{y})\|, \begin{cases} m = 0? \\ r = a? \end{cases}$$

(*) To thymata auto upoxei sto biblio stampro (\mathbb{R}^n)

π.χ

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \underbrace{x^2 + y_1^2}_{g_1(x, \bar{y})} \\ \underbrace{x^2 e^{x+y_2}}_{g_2(x, \bar{y})} \end{pmatrix} = \bar{g}(x, \bar{y})$$

$$R = \{ |x| \leq 1, |y_1| + |y_2| \leq 1 \}$$

Παράδειγμα με συν. Lip;

$$\sup_R \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y_1} (x, y_1, y_2) \right\| = \sup_R \left\| \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(2y_1)^2 + 0^2} = 2|y_1| = 2$$

$$\sup_R \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y_2} (x, y_1, y_2) \right\| = \sup_R \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 e^{x+y_2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x^2 e^{x+y_2})^2} = x^2 e^{x+y_2} \leq 1 \cdot e^2 = e^2$$

* Ενδείξει ότι ποιο στάδιο θα χρησιμοποιήσω, διότι οι $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ είναι ισοδύναμοι //

Ειδική περίπτωση: (να έχω γραμ. συνθήματα)

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned} \right\} \bar{y}'(x) = A(x)\bar{y}_1(x) + \bar{b}(x)$$

όπου $A(x)$: τετραγων. $F(x, \bar{y}_1)$

Μπορώ να ελαφρώσω το θεώρημα 1;

Αν $A \in \Gamma_{\text{Lip}}$ και $f \in \mathbb{R}^n$ τότε: i) $\|A\|_{\infty} = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_{\infty}$

ii) $\forall \bar{f} \in \mathbb{R}^n, A \in \Gamma_{\text{Lip}} \rightarrow \|A\bar{f}\| \leq \|A\|_{\infty} \|\bar{f}\|$

Με βάση τα παραπάνω για τον $n \times n$ τεταχθ $A(x)$ και για το $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ είναι:

$$\|F(x, \bar{y}_1) - F(x, \bar{y}_2)\| = \|A(x)[\bar{y}_1 - \bar{y}_2]\| \leq \|A(x)\| \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$$

όπου $K = \sup_{x \in I} \|A(x)\| \leq K \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$. Από παλιό ειν. συνθήματα Lip οπότε ιχνη το θεώρημα // (και ετσι ελαφρ. ορισμ) (και λαμβ. u.t)

Αδυναμία - Παράδειγμα:

Έστω ότι έχω την διαδ. Εξίσωση $\bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}$

$$\bar{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

α) Έχει λύσεις;

→ Έχω την μορφή $\bar{y}' = A\bar{y}$, όπου A είναι σταθ. μήτρας. Από η συνθήκη Lip ισχύει. Το $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} από τον A η εξίσωση $\bar{y}'(x) = A(x)\bar{y}(x)$ ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} . Από έχω προβ. εξίσωση ισχύει η συνθ. Lip.

$$F(x, \bar{y}) = A\bar{y}$$

$$\|F(x, \bar{y}_1) - F(x, \bar{y}_2)\| = \|A\bar{y}_1 - A\bar{y}_2\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\| = K \cdot \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$$

Ετσι η λύση του συστήματος υπάρχει και είναι μοναδική //

β) Να δικαιωθεί ότι ~~η~~ λύση είναι η άνω:

$$\bar{y}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{2x} \\ \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x} \\ \frac{1}{9} - \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{4}{3}e^{-x} \end{bmatrix}$$

Λύση

Βρίσκω δηλ:

$$\bar{y}'(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \cdot 2e^{2x} \\ \frac{1}{3} \cdot 2e^{2x} + \frac{2}{3}(-1)e^{-x} \\ -\frac{1}{6} \cdot 2e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} \end{bmatrix}$$

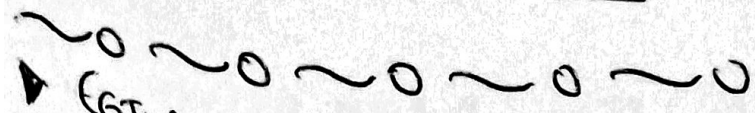
πρέπει το $A\bar{y}(x) =$

να βρισκε αυτό

Επιλυση 90

Για $x=0$ οπότε $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1/3 - 1/2 \\ -1/3 + 2/3 \\ 1/2 - 1/6 - 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = bf το $\vec{y}(0)$ να διεται, Γνωστωσ //

Απο εως οτως ζιγω



Εστω εως τελευτας $A(x) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \stackrel{\text{ου}}{=} A'(x) = \begin{bmatrix} a'_{11}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n1}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

ου n οριζωνια $D_n : I \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε n παραγωγες της οριζωνιας εως:

$$D'(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}' =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

Οποτε Σιωνιστωσ οε $|A(x)|' \neq |A'(x)|$

Ορισμός: Αν $f_1, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις οι οποίες έχουν παράγωγο (ταύτα) $n-1$ φορές, τότε η ορίζεται

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} (x)$$

Λογίζεται ορίζεται Wronski των f_1, \dots, f_n .

π.χ

$$f_1(x) = e^{2x} + x^2$$

$$f_2(x) = x + \cos x \quad , \quad x \in (-\pi, \pi) = I$$

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} + x^2 & x + \cos x \\ 2e^{2x} + 2x & 1 - \sin x \end{vmatrix} = -(e^{2x} + x^2)(1 + \sin x) - (x + \cos x)(2e^{2x} + 2x)$$

Ας είναι $f_1, \dots, f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$

Ορισμός: Λέμε ότι οι f_1, \dots, f_n είναι γ.ε.σ. στο A αν

$$\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \text{ με } |c_1| + \dots + |c_n| \neq 0 \text{ και}$$

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0, \quad \forall x \in A //$$

⊗ Πρέπει πάντα στον θάλα να πηγαίνω για γ.ε.σ. με γ.ε.σ. να προσέχω για να είμαι βέβαιος //

Ασκηση

Να ελεγχώ αν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι γ.ε.σ. με γ.ε.σ.

$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = \cos x \quad , \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$f_3(x) = \cos 2x$$

Λύση

As είναι Νίγηρ
 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \cos 2x = 0, \quad x \in (-2\pi, 2\pi)$$

για $x=0$: $c_1 + c_2 + c_3 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$: $c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot (-1) = 0$

$x = -\frac{\pi}{2}$: $c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot (-1) = 0$

για $x = \pi$: $c_1 + (-1)c_2 + c_3 \cdot 1 = 0$

Αρα έχω υποστήμη στο ελάχιστο ομογενές σύστημα:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$c_2 + 0 - c_3 = 0$$

$$c_1 - c_2 + c_3 = 0$$

$$\left. \begin{matrix} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + 0 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow D = | \dots | \neq 0$$

αρα $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Β' τμήμα: Έστω $f(x) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \cos 2x = 0, \quad x \in (-2\pi, 2\pi)$

Παρατηρούμε ότι f είναι παραγωγίσιμη.

Η f διακρίνεται ότι δεν είναι σταθερή άρα...